

# Deduzione Naturale – Esempi Proporzionale

December 16, 2014

$$\mathbf{M} \vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

$$\frac{\frac{A^1 \quad \neg A^2}{\neg\neg A} \neg m^2}{A \rightarrow \neg\neg A} \rightarrow I^1$$

$$\mathbf{M} \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$\frac{\frac{\frac{A^1 \quad A \rightarrow B^2}{B} \rightarrow E \quad \neg B^3}{\neg A} \neg - m^1}{\frac{\neg B \rightarrow \neg A}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)} \rightarrow I^2} \rightarrow I^3$$

$$\mathbf{C} \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\frac{\frac{\frac{\neg B \rightarrow \neg A^3 \quad \neg B^1}{\neg A} \rightarrow E \quad A^2}{B} \neg c^1}{\frac{A \rightarrow B}{(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)} \rightarrow I^2} \rightarrow I^3$$

$$\mathbf{M} \vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$$

$$\frac{\frac{\frac{A^1}{A \vee \neg A} \vee I \quad \neg(A \vee \neg A)^2}{\neg\neg m^1} \quad \frac{\frac{\neg A}{A \vee \neg A} \vee I \quad \neg(A \vee \neg A)^3}{\neg\neg m^{2,3}}}{\neg\neg(A \vee \neg A)}$$

**Qualche altro esempio di derivazione**

$$A \wedge B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$\frac{\frac{\frac{A \wedge B^1}{A} \wedge E \quad \neg A^2}{\neg(A \wedge B)} \neg m^1 \quad \frac{\frac{A \wedge B^2}{B} \wedge E \quad \neg B^2}{\neg(A \wedge B)} \neg m^2 \quad \neg A \vee \neg B^4}{\neg(A \wedge B)} \vee I^2 \quad \frac{\neg(A \wedge B) \quad A \wedge B}{\neg(\neg A \vee \neg B)} \neg m^4$$

$$\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) \quad \text{Legge di confrontabilità}$$

$$\frac{\frac{\frac{A^1}{B \rightarrow A} \rightarrow I \quad \frac{\frac{\neg A^1 \quad A^3}{B} \neg i}{A \rightarrow B} \rightarrow I^3}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \vee I \quad \frac{\frac{\frac{A^1}{B \rightarrow A} \rightarrow I \quad \frac{\frac{\neg A^1 \quad A^3}{B} \neg i}{A \rightarrow B} \rightarrow I^3}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \vee I \quad A \vee \neg A}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \vee E^1$$

$$\vdash (A \vee B) \rightarrow (B \vee A) \quad \text{Legge di commutativit della disgiunzione}$$

$$\frac{\frac{A^1}{A \vee B} \vee I \quad \frac{B^1}{A \vee B} \vee I \quad (A \vee B)^3}{B \vee A} \vee E^1$$

$$\frac{}{(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)} \rightarrow I^3$$

$\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \leftrightarrow A \wedge (B \vee C)$  Legge di distributività di  $\wedge$  su  $\vee$

$$\frac{\frac{(A \wedge B)^1}{A} \wedge E \quad \frac{(A \wedge B)^1}{B \vee C} \vee I \quad \frac{(A \wedge C)^1}{A} \wedge E \quad \frac{(A \wedge C)^1}{B \vee C} \vee I}{\frac{}{A \wedge (B \vee C)} \wedge I \quad \frac{}{A \wedge (B \vee C)} \wedge I \quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)^3} \vee E^1$$

$$\frac{}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \vee C)} \rightarrow I^3$$

$$\frac{\frac{A \wedge (B \vee C)^2}{A} \wedge E \quad B^1 \quad \frac{A \wedge (B \vee C)^2}{A} \wedge E \quad C^1}{\frac{}{A \wedge B} \wedge I \quad \frac{}{A \wedge C} \wedge I \quad \frac{A \wedge (B \vee C)^2}{B \vee C} \wedge E} \vee I$$

$$\frac{}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \vee I$$

$$\frac{}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \rightarrow I^2$$

$$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$\vdash \neg \neg (\neg \neg A \rightarrow A)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{A^1}{\neg\neg A \rightarrow A} \rightarrow I \quad \neg(\neg\neg A \rightarrow A)^3 \\
\hline
\neg A \quad \neg\neg A^2 \\
\hline
A \quad \neg i \\
\hline
\frac{\frac{A}{\neg\neg A \rightarrow A} \rightarrow I^2 \quad \neg(\neg\neg A \rightarrow A)^3}{\neg\neg(\neg\neg A \rightarrow A)} \neg m^3
\end{array}$$

$$\vdash \neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B) \quad \text{Legge di Crisippo}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg A^2 \quad A^1}{B} \neg i \\
\hline
\frac{B}{A \rightarrow B} \rightarrow I^1 \quad \neg(A \rightarrow B)^4 \\
\hline
\neg\neg A \quad \neg m^2 \\
\hline
A \quad \neg c \\
\hline
\frac{A \wedge \neg B}{\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)} \wedge I \\
\hline
\frac{\neg(A \rightarrow B)^4 \quad \frac{B^3}{A \rightarrow B} \rightarrow I}{\neg B} \neg m^3
\end{array}$$

$$\vdash (\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{Legge di Filone}$$

$$\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg A^2 \quad A^1}{B} efq \\
\hline
\neg A \vee B \quad \frac{B}{A \rightarrow B} \rightarrow I^1 \quad \frac{B^2}{A \rightarrow B} \rightarrow I \\
\hline
A \rightarrow B \quad \vee E^2
\end{array}$$

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{A^1 \quad A \rightarrow B^2}{B} \rightarrow E \\
\frac{\neg A \vee A \quad \frac{B}{\neg A \vee B} \vee I \quad \frac{\neg A^1}{\neg A \vee B} \vee I}{\neg A \vee B} \vee E^1 \\
\frac{\neg A \vee B}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)} \rightarrow I^2
\end{array}$$

$$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \quad \text{Legge di De Morgan}$$

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{A^1}{A \vee B} \vee I \quad \frac{B^2}{A \vee B} \vee I \\
\frac{\neg A}{\neg A} \neg m^1 \quad \frac{\neg B}{\neg B} \neg m^1 \\
\frac{\neg(A \vee B)^3 \quad \frac{\neg A \wedge \neg B^3}{\neg A \wedge \neg B^3} \wedge I}{\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)} \rightarrow I^3
\end{array}$$

$$\vdash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{A^1 \quad \frac{\neg A \wedge \neg B^3}{\neg A} \wedge E}{\neg(A \vee B)} \wedge E \quad \frac{B^1 \quad \frac{\neg A \wedge \neg B^3}{\neg B} \wedge E}{\neg(A \vee B)} \wedge E \\
\frac{A \vee B^2 \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg(A \vee B)} \neg \vee E^1}{\neg(A \vee B)} \neg m^2 \\
\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)} \rightarrow I^3
\end{array}$$

$$\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \quad \text{Legge di De Morgan}$$

$$\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\begin{array}{c}
\frac{A \vee \neg A \quad \frac{\neg A^2}{\neg A \vee \neg B} \vee I \quad \frac{\frac{A^2 \quad B^1}{A \wedge B} \quad \neg(A \wedge B)^3}{\neg B} \neg m^1}{\neg A \vee \neg B} \vee E^2 \\
\frac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B} \rightarrow I^3
\end{array}$$

$$\vdash \neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{A \wedge B^1}{A} \wedge E \quad \neg A^3}{\neg(A \wedge B)} \neg m^1 \quad \frac{\frac{A \wedge B^2}{A} \wedge E \quad \neg B^3}{\neg(A \wedge B)} \neg m^1 \\
\frac{\neg A \vee \neg B \quad \neg(A \wedge B)}{\neg(A \vee B)} \vee E^3 \\
\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)} \rightarrow I^4
\end{array}$$

$$\vdash \neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \quad \text{distribuzione del } \neg\neg$$

$$\begin{array}{c}
\frac{A \rightarrow B^2 \quad A^1}{B} \rightarrow E \quad \neg B^3}{\neg A} \neg m^1 \\
\frac{\neg\neg(A \rightarrow B)^5 \quad \neg A}{\neg(A \rightarrow B)} \neg m^3 \\
\frac{\neg\neg(A \rightarrow B)}{\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B} \rightarrow I^4 \\
\frac{\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B}{\neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)} \rightarrow I^5
\end{array}$$

$$\vdash \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A \quad \text{tripla negazione}$$

$$\frac{\frac{A^1}{\neg\neg A} \text{ dnd} \quad \neg\neg\neg A^2}{\frac{\neg A^1}{\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A} \rightarrow I^2}$$

$$\frac{\frac{\neg A^1}{\neg\neg\neg A} \text{ dnd}}{\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A} \rightarrow I^1$$

$$\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A \quad \textit{consequentia mirabilis}$$

$$\frac{\neg((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)^3 \quad \frac{\frac{A^1}{(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A} \rightarrow I}{\neg A} \neg m^1 \quad \neg A \rightarrow A^2}{\neg A \rightarrow A^2} \rightarrow E$$

$$\frac{\neg((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)^3 \quad \frac{\frac{A}{(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A} \rightarrow I^2}{\neg m^3}}{\frac{\neg\neg((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)}{(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A} \text{ dn}}$$

$$\vdash (A \vee B) \wedge \neg B \rightarrow A \quad \textit{modus tollendo ponens}$$

$$\frac{A \vee B \quad A^1 \quad \frac{B^1 \quad \neg B}{A} \neg i}{A} E_{\vee}^1$$

$$\vdash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{A \wedge \neg B^2}{A} \wedge E \quad \frac{A \rightarrow B^1}{A \rightarrow B^1} \rightarrow E \quad \frac{A \wedge \neg B^2}{A \wedge \neg B^2} \wedge E \\
\frac{B}{B} \quad \frac{\neg B}{\neg B} \neg m^1 \\
\frac{\neg(A \rightarrow B)}{\neg(A \rightarrow B)} \rightarrow I^2 \\
\frac{(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)}{(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)} \rightarrow I^2
\end{array}$$

I seguenti teoremi della logica classica NON sono teoremi della logica intuizionista.

$$\begin{array}{l}
(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \\
(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A) \\
\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B) \\
\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \vee B) \\
\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B) \\
(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B) \\
(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) \\
A \vee \neg A \\
(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A \\
((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \\
\neg\neg A \rightarrow A
\end{array}$$

$$\mathbf{M} \vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

$$\begin{array}{c}
\frac{A^1 \quad \neg A^2}{\neg\neg A} \neg m^2 \\
\frac{\neg\neg A}{A \rightarrow \neg\neg A} \rightarrow I^1
\end{array}$$

$$\mathbf{M} \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{A^1 \quad A \rightarrow B^2}{B} \rightarrow E \quad \neg B^3 \\
\frac{\neg A}{\neg A} \rightarrow I^3 \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)} \rightarrow I^2
\end{array}$$



$$\mathbf{C} \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\frac{\frac{\frac{\neg B \rightarrow \neg A^3 \quad \neg B^1}{\rightarrow E} \quad A^2}{\neg A} \neg c^1}{\frac{B}{A \rightarrow B} \rightarrow I^2} \rightarrow I^3$$

$$\mathbf{M} \vdash \neg \neg (A \vee \neg A)$$

$$\frac{\frac{\frac{A^1}{A \vee \neg A} \vee I \quad \neg(A \vee \neg A)^2}{\neg - m^1}}{\frac{\frac{\neg A}{A \vee \neg A} \vee I \quad \neg(A \vee \neg A)^3}{\neg \neg (A \vee \neg A)} \neg - m^{2,3}}$$

#### Ancora sulle regole per la negazione.

La regola  $\neg i$  è un caso particolare di  $\neg c$  quello in cui *non* vengono scaricate le assunzioni da cui  $B$  e  $\neg B$  dipendono. Inoltre la regola  $\neg m$  si ottiene da  $\neg c$ :

$$\frac{\frac{\frac{\neg \neg A^5 \quad \neg A^1}{A} \neg c^1 \quad \frac{\frac{A^2}{\vdots B} \rightarrow I^2}{A \rightarrow B} \rightarrow E}{B} \quad \frac{\frac{\frac{\neg \neg A^5 \quad \neg A^3}{A} \neg c^3 \quad \frac{\frac{A^4}{\vdots \neg B} \rightarrow I^4}{A \rightarrow \neg B} \rightarrow E}{\neg B} \rightarrow E}{\neg A} \neg c^5$$

Si noti che dalla sola regola  $\neg i$  non si ottiene  $\neg m$  !

Assiomatizzazione alternativa di  $\mathbf{C}$ .

$\mathbf{C} = \mathbf{I} + dnf$ , ove  $dnf$  è la regola di doppia negazione forte.

$$\frac{\neg\neg A}{A} dnf$$

$$\frac{\begin{array}{c} \neg A^1 \\ \vdots \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg A^1 \\ \vdots \\ \neg B \end{array}}{\neg\neg A} \neg m^1$$

$$\frac{\neg\neg A}{A} dnf$$

$$\frac{\neg\neg A \quad \neg A^1}{A} \neg c^1$$